Zur theoretischen Erklärung unserer Messungen bedarf es unserer Meinung nach noch einer großen Zahl weiterer Versuche. Vor allem muß die Meßgenauigkeit erhöht werden, wodurch die Entscheidung zwischen exponentiellem und hyperbolischem Verlauf dann sicherer als bisher getroffen und der Zahlenwert für α mit kleinerem Fehler angegeben werden kann. Weiterhin dürften Messungen über das Spektrum des Fluoreszenzanteiles im Verhältnis zum Spektrum der länger dauernden Vorgänge von Wichtigkeit sein. Schließlich ließen sich auf Grund von Untersuchungen über den Einfluß der Temperatur und der Korngröße der Leuchtstoffe wichtige Aufschlüsse über die Vorgänge, die das Auftreten der drei beschriebenen Leuchtprozesse verursachen, geben. Derartige Versuche sind bei uns im Gange[8].

[8] Frl. I. Klampt und Hrn. G. Goldbach danken wir für Mitarbeit bei der Durchführung der Messungen.

Der Massendefekt als Folge der relativistischen Feldgleichung für das Zweikörperproblem

Von Walter Thirring *

(Z. Naturforschg. 5 a, 85—88 [1950]; eingegangen am 10. Juli 1949)

Es wird die relativistische Feldgleichung für zwei Partikel mit Spin $^1/_2$ aufgestellt und daraus deduziert, daß sie sich, falls sie untereinander gebunden sind, verhalten wie ein Teilchen, dessen Masse gleich der Summe der Massen vermindert um die Bindungsenergie ist.

Der Massendefekt ist eine der besten empirischen Stützen der Relativitätstheorie und ein Grundpfeiler der gesamten Kernphysik. Aus den Aussagen der Relativitätstheorie folgt unmittelbar, daß zwei Teilchen, die untereinander durch eine Kraft verbunden sind, sich in einem äußeren Kraftfeld tatsächlich so verhalten wie ein Teilchen mit der Summe der Massen minus der Bindungsenergie als Masse. Trotzdem ist es im einzelnen oft schwierig, dieses Ergebnis der Relativitätstheorie nachzurechnen, da die Rechnung die Lösung des relativistischen Mehrkörperproblems voraussetzt. Strenge Lösungen gibt es bisher nicht. Es existieren nur Näherungslösungen, die um eine Näherung weitergehen als der klassische Standpunkt. Im Rahmen dieser Näherung konnte auch Bagge[1] zeigen, daß der Massendefekt aus einer Lagrange-Funktion folgt, welche der bekannten Darwinschen relativistischen Lagrange-Funktion nachgebildet ist. Die Arbeit von Bagge verwendet jedoch die klassische Partikeltheorie, und es scheint geboten, zu untersuchen, ob die angemessene feldmäßige Behandlung der Elementarpartikel dasselbe leistet. Auch scheinen die Grundlagen der Baggeschen Arbeit nicht willkürfrei, da er seine Lagrange-Funktion nur dadurch propagieren kann, daß sie im Fall des Coulombschen Kraftgesetzes in die Darwinsche übergeht. In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, daß aus der relativistischen Feldgleichung für das Zweikörperproblem nach Reduktion auf die großen Komponenten und Separation tatsächlich für die Schwerpunktskoordinaten eine Schrödinger-Gleichung folgt, in welcher als Masse die Summe der Massen minus der Bindungsenergie steht. Auch wird hier der Willkür kein Spielraum gelassen, da die Feldgleichung durch die Forderung der relativistischen Invarianz eindeutig bestimmt wird. Dabei stellt sich auch heraus, daß die bisher verwendete Feldgleichung für das Zweikörperproblem nicht streng invariant ist und daher einen falschen Massendefekt liefert.

* Wien IX, Strudlhofgasse 13.

[1] E. Bagge, Z. Naturforschg. 1, 361 [1946].

§ 1. Aufstellung der Feldgleichung

Eine relativistische invariante Feldgleichung für zwei Partikel mit Spin $^1/_2$ muß im kräftefreien Fall folgende Gestalt haben:

$$\left(\gamma_1{}^i \frac{\partial}{\partial x_i{}^1} + \gamma_2{}^i \frac{\partial}{\partial x_i{}^2} + \mu_1 + \mu_2\right) \psi(x^1, x^2) = 0 . \quad (1)$$

Hier stellen die γ die üblichen Diracschen Matrizen dar, μ bedeutet die reziproke Compton-Wellenlänge, und die Indizes 1 und 2 beziehen sich auf die Partikel. Auch wollen wir im folgenden die jetzt üblichen Fundamentalgrößen verwenden, als Masse mc^2, als Impuls pc und als Wirkungsquantum $hc/2\pi$. Wenn wir nun in Gl. (1) wie gewöhnlich die Substitution

$$\gamma^i = -i\beta\,\alpha^i\,(i=1,2,3)\,,\quad \gamma^4 = \beta\,;\quad \mu = m/h \qquad (2)$$

vornehmen und mit $\beta_1\,\beta_2$ multiplizieren, erhalten wir

$$\Big(\beta_2\,(\alpha_1\,\nabla_1)\,\frac{h}{i} + \beta_1\,(\alpha_2\,\nabla_2)\,\frac{h}{i} + \beta_2\,\frac{h}{i\,c}\,\frac{\partial}{\partial t^1} + \beta_1\,\frac{h}{i\,c}\,\frac{\partial}{\partial t^2} + [m_1 + m_2]\,\beta_1\,\beta_2\Big)\,\psi = 0\,. \qquad (3)$$

Es können also nicht beide Zeitableitungen mit der Einheitsmatrix multipliziert werden. Dies setzt man aber bei der üblichen Gleichung für das Zweikörperproblem voraus, welche man wie folgt ansetzt:

$$\Big((\alpha_1\nabla_1)\,\frac{h}{i} + (\alpha_2\,\nabla_2)\,\frac{h}{i} + \beta_1\,m_1 + \beta_2\,m_2\Big)\,\psi = E\,\psi\,. \qquad (4)$$

Diese Gleichung läßt sich aber durch keine Transformation im Spinraum auf die Gestalt (1) bringen, in welcher allein der Nachweis der relativistischen Invarianz erbracht werden kann. Hier wird er einfach gegeben durch die Transformationsvorschrift:

$$\begin{aligned} X_\mu^{\prime\,1,2} &= a_{\mu\nu}\,X_\nu^{12}, \\ \psi' &= S^1\,S^2\,\psi\,, \qquad (5) \\ (S^{1,2})^{-1}\,\gamma_\mu^{1,2}\,S^{1,2} &= a_{\mu\nu}\,\gamma_\nu^{12}. \end{aligned}$$

Was nun die Kräfte anlangt, wollen wir die Teilchen untereinander skalar koppeln und von außen her ein vektorielles Feld, etwa ein elektromagnetisches, auf sie einwirken lassen. Im Sinne einer nichtrelativistischen Näherung berücksichtigen wir für den Einfluß dieses Feldes nur die zeitartigen Komponenten, so daß unsere Ausgangsgleichung folgendes Aussehen gewinnt:

$$\Big(\gamma_i^1\,\frac{\partial}{\partial x^1_i} + \gamma_i^2\,\frac{\partial}{\partial x^2_i} + \mu_1 + \mu_2 + U\big(\gamma_4^1 + \gamma_4^2\big) + V\Big)\,\psi = 0\,, \qquad (6)$$

wobei

$$U\left(\frac{m_1\,x^1 + m_2\,x^2}{m_1 + m_2}\right), \qquad V\,(x^1 - x^2)\,.$$

Hier drücken wir die γ aus durch zwei Paulische Matrixvektoren $\vec{\varrho}, \vec{\sigma}$

$$\gamma_4 = \varrho_3\,;\ \gamma_i = \varrho_2\,\vec{\sigma} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und erhalten

$$\Big(\varrho_2^{\,1}\,(\sigma^1\,\nabla^1) + \varrho_2^{\,2}\,(\sigma^2\,\nabla^2) + \varrho_3^{\,1}\Big\{\frac{\partial}{\partial i\,c\,t^1} + U\Big\} + \varrho_3^{\,2}\Big\{\frac{\partial}{\partial i\,c\,t^2} + U\Big\} + \mu_1 + \mu_2 + V\Big)\,\psi = 0\,. \qquad (7)$$

Als nächstes spalten wir die Zeitabhängigkeit ab durch folgenden Ansatz:

$$\psi = \varphi\,e^{-i\left(\frac{E_1\,c\,t_1}{h} + \frac{E_2\,c\,t_2}{h}\right)}, \qquad (8)$$

$$E_1 = m_1 + e/2\,;\quad E_2 = m_2 + e/2\,.$$

e ist dann die nichtrelativistische Energie. Ferner wollen wir auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten transformieren und führen die Bezeichnung $p = \nabla\,h/i$ ein.

$$p_1 = \tfrac{m_1}{M}\,p' + p\,;\quad p_2 = \tfrac{m_2}{M}\,p' - p\,,\quad M = m_1 + m_2\,. \qquad (9)$$

Zur Reduktion müssen wir die Matrizen für die ϱ ausschreiben. Die Feldfunktion wird dann ein vierkomponentiger Vektor im Matrixraum der ϱ, welchen wir in der üblichen Gestalt ansetzen:

$$\varphi = \begin{pmatrix} {}^3f_1 \\ (1/\sqrt{2})\,({}^3f_0 + {}^1f_0) \\ (1/\sqrt{2})\,({}^3f_0 - {}^1f_0) \\ {}^3f_{-1} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Dadurch schreibt sich Gl. (7) dann:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\sigma_1\left(\frac{m_1}{M}\,p' + p\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\sigma_2\left(\frac{m_2}{M}\,p' - p\right) - \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)(m_1 - U + e/2)$$

$$- \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)(m_2 - U + e/2) + \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)(M + V)\Bigg)\,\varphi = 0,$$

$$\sigma_1\left(\frac{m_1}{M}\,p' + p\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\,({}^3f_0 - {}^1f_0) + \sigma_2\left(\frac{m_2}{M}\,p' - p\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\,({}^3f_0 + {}^1f_0) + (2\,U + V - e)\,{}^3f_1 = 0\,, \qquad (8\text{a})$$

$$\sigma_1\left(\frac{m_1}{M}p'+p\right){}^3f_{-1}-\sigma_2\left(\frac{m_2}{M}p'-p\right){}^3f_1+(2m_2+V)\frac{1}{\sqrt{2}}({}^3f_0+{}^1f_0)=0\,, \tag{8b}$$

$$-\sigma_1\left(\frac{m_1}{M}p'+p\right){}^3f_1+\sigma_2\left(\frac{m_2}{M}p'-p\right){}^3f_{-1}+(2m_1+V)\frac{1}{\sqrt{2}}({}^3f_0-{}^1f_0)=0\,, \tag{8c}$$

$$-\sigma_1\left(\frac{m_1}{M}p'+p\right)\frac{1}{\sqrt{2}}({}^3f_0+{}^1f_0)-\sigma_2\left(\frac{m_2}{M}p'-p\right)\frac{1}{\sqrt{2}}({}^3f_0-{}^1f_0)+(2M+e-2U+V)\,{}^3f_{-1}=0\,. \tag{8d}$$

Aus den Gln. (8) lesen wir die Abschätzung

$$^3f_{-1}:({}^3f_0\pm{}^1f_0):{}^3f_1\sim V/M \tag{11}$$

ab. Für gebundene Nucleonen hat diese nicht ganz die Größenordnung 10^{-2}. Wir werden daher als erste Näherung $^3f_{-1}$ vernachlässigen und $2m+V$ durch $2m$ ersetzen. Dann können wir die andern Feldgrößen eliminieren und erhalten eine Gleichung für die größte Komponente $^3f_1$ allein.

$$^3f_0=(1/\sqrt{2})\left(\frac{1}{2M}p'(\sigma_1+\sigma_2)+\frac{p}{2}\left(\frac{\sigma_1}{m_1}-\frac{\sigma_2}{m_2}\right)\right){}^3f_1\,,$$

$$^1f_0=(1/\sqrt{2})\left(\frac{1}{2M}p'(-\sigma_1+\sigma_2)-\frac{p}{2}\left(\frac{\sigma_1}{m_1}+\frac{\sigma_2}{m_2}\right)\right){}^3f_1\,,$$

$$\left(\frac{1}{2m_1}\left[\sigma_1\left(\frac{m_1}{M}p'+p\right)\right]^2+\frac{1}{2m_2}\left[\sigma_2\left(\frac{m_2}{M}p'-p\right)\right]^2+V+2U-e\right){}^3f_1=0\,.$$

Unter Verwendung bekannter Eigenschaften der Spinmatrizen ergibt dies:

$$\left(\frac{p'^2}{2M}+\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+2U+V-e\right)e\,{}^3f_1=0\,. \tag{12}$$

Als erste Näherung ergibt sich tatsächlich die gewöhnliche Schrödinger-Gleichung für zwei Teilchen in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten. Um den Massendefekt zu erhalten, müssen wir die Näherung einen Schritt weiterführen. Wir werden daher $^3f_{-1}$ nicht mehr vernachlässigen, sondern es aus Gl. (8d) berechnen und in (8b) und (8c) einsetzen. Zur Vereinfachung nehmen wir $m_1=m_2$ an und setzen $\frac{1}{2}p'=q$. Auch wollen wir die langwierigen Rechnungen dem Leser überlassen und stellen nur kurz die im folgenden verwendeten Relationen von Produkten mit Spinmatrizen zusammen. Dabei wollen wir ein Vektorprodukt durch eckige Klammer kennzeichnen, die runde Klammer bei einem Skalarprodukt aber manchmal weglassen, da ein Mißverständnis nicht möglich ist.

$$(\sigma p)(\sigma q)=pq+i\sigma[pq]\,;\qquad(\sigma p)^2=p^2; \tag{13}$$

$$(\sigma_1\pm\sigma_2)p(\sigma_1\pm\sigma_2)q=2pq+i(\sigma_1+\sigma_2)[pq]\pm(\sigma_1p)(\sigma_2q)\pm(\sigma_2p)(\sigma_1q)\,;$$

$$|(\sigma_1\pm\sigma_2)p|^2=2\{p^2\pm(\sigma_1p)(\sigma_2p)\}\,;$$

$$(\sigma_1-\sigma_2)p(\sigma_1+\sigma_2)q=i(\sigma_1-\sigma_2)[pq]+(\sigma_1p)(\sigma_2q)-(\sigma_2p)(\sigma_1q)\,;$$

$$(\sigma_1-\sigma_2)p(\sigma_1+\sigma_2)q+(\sigma_1+\sigma_2)q(\sigma_1-\sigma_2)p=2[pq][\sigma_1\sigma_2]\,;$$

$$(\sigma_1-\sigma_2)p(\sigma_1-\sigma_2)q+(\sigma_1+\sigma_2)q(\sigma_1+\sigma_2)p=4pq\,;\qquad(pq)^2=p^2q^2-[pq]^2\,.$$

$$^3f_0=\frac{1}{2\bar m\sqrt{2}}(q(\sigma_1+\sigma_2)+p(\sigma_1-\sigma_2))\,{}^3f_1-\frac{1}{2\bar mK}\Big\{(q^2+p^2+(\sigma_1q)(\sigma_2q)-(\sigma_1p)(\sigma_2p)-[pq][\sigma_1\sigma_2])\,{}^3f_0+2pq\,{}^1f_0\Big\}\,; \tag{14}$$

$$^1f_0=\frac{-1}{2\bar m\sqrt{2}}(q(\sigma_1-\sigma_2)+p(\sigma_1+\sigma_2))\,{}^3f_1-\frac{1}{2\bar mK}\Big\{(q^2+p^2-(\sigma_1q)(\sigma_2q)+(\sigma_1p)(\sigma_2p)-[pq][\sigma_1\sigma_2])\,{}^1f_0+2pq\,{}^3f_0\Big\}\,;$$

$$K=2M+\varepsilon-U+V\,;\qquad\bar m=m+V/2\,.$$

Wenn wir Größen bis einschließlich der Ordnung $(p/m)^4$ berücksichtigen, erhalten wir für ${}^3f_0$ und ${}^1f_0$, ausgedrückt durch ${}^3f_1$:

$$
\begin{aligned}
{}^3f_0 = \frac{1}{2\,\overline{m}\sqrt{2}} \Big((\sigma_1 - \sigma_2)\,p + (\sigma_1 + \sigma_2)\,q - \frac{1}{2\,\overline{m}\,K} \Big\{ & (p^2 - (\sigma_1\,p)(\sigma_2\,p) + q^2 + (\sigma_1\,q)(\sigma_2\,q) + [p\,q][\sigma_1\,\sigma_2]) \\
& ((\sigma_1 - \sigma_2)\,p + (\sigma_1 + \sigma_2)\,q) - 2\,p\,q\,[(\sigma_1 + \sigma_2)\,p + (\sigma_1 - \sigma_2)\,q] \Big\} \Big)\, {}^3f_1; \qquad (15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^1f_0 = \frac{-1}{2\,\overline{m}\sqrt{2}} \Big(& (\sigma_1 + \sigma_2)\,p + (\sigma_1 - \sigma_2)\,q - \frac{1}{2\,m\,K} \Big\{ (p^2 + (\sigma_1 p)(\sigma_2 p) + q^2 - (\sigma_1\,q)(\sigma_2\,q) \\
& - [p\,q][\sigma_1\,\sigma_2])\,((\sigma_1 + \sigma_2)\,p + (\sigma_1 - \sigma_2)\,q) - 2p\,q\,[(\sigma_1 - \sigma_2)\,p + (\sigma_1 + \sigma_2)\,q] \Big\} \Big)\, {}^3f_1\,.
\end{aligned}
$$

Diese Ausdrücke müssen wir nun in Gl. (8a) einsetzen und erhalten so nach längeren, aber elementaren Rechnungen:

$$
\begin{aligned}
{}^3f_1\,(e - 2\,U - V) = \Big(& \frac{1}{\overline{m}}\,(p^2 + q^2) - \frac{1}{4\,m^3}\,(p^4 + 2\,p^2\,q^2 + q^4) - \frac{[p\,q]}{16\,m^3} \Big\{ (\sigma_1\,p)\,[\sigma_1\,\sigma_2]\,(\sigma_2\,p) \\
& + (\sigma_2\,p)\,[\sigma_1\,\sigma_2]\,[\sigma_1\,p] - (\sigma_1\,p)\,[\sigma_1\,\sigma_2]\,(\sigma_2\,q) + (\sigma_2 p)\,[\sigma_1\,\sigma_2]\,(\sigma_1\,q) + (\sigma_1\,q)\,[\sigma_1\,\sigma_2]\,(\sigma_2 p) - (\sigma_2\,q)\,[\sigma_1\,\sigma_2]\,(\sigma_1\,p) \\
& + 4\,\sigma_1\,([p\,q]\,\sigma_2) + 4\,[p\,q] - (\sigma_1\,q)\,[\sigma_1\,\sigma_2]\,(\sigma_2\,q) - (\sigma_2\,q)\,[\sigma_1\,\sigma_2]\,(\sigma_1\,q) \Big\} \Big)\, {}^3f_1\,. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Was den ersten Teil des Operators auf der rechten Seite betrifft, so sehen wir zunächst das klassische Glied, dann Terme mit p^4 und q^4, welche die übliche erste relativistische Korrektur zum Hamilton-Operator darstellen. Dann tritt ein Glied mit $p^2\,q^2$ auf, was zusammen mit der veränderten Masse $\overline{m}$ für den Massendefekt verantwortlich ist, wie man aus folgendem sofort erkennt:

$$
\begin{aligned}
\frac{p'^2}{2}\,\frac{1}{2m + lr} &= \frac{p'^2}{2\,(2\,m + p^2/m + V)} \\
&= p'^2 \left(\frac{1}{4\,m} - \frac{p^2}{8\,m^3} - \frac{V}{8\,m^2} \right); \\
q^2 \left(\frac{1}{m} - \frac{p^2}{2\,m^3} \right) &= \frac{p'^2}{4} \left(\frac{1}{m} - \frac{V}{2\,m^2} - \frac{p^2}{2\,m^3} \right). \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Es ist jedoch wichtig zu bemerken, daß unser Resultat, da es ein Ergebnis höherer Näherungen ist, sehr empfindlich gegenüber Abänderungen der Feldgleichung ist. Wenn man etwa Gl. (4) als Ausgangspunkt wählt (die analoge Rechnung sei dem Leser überlassen), dann treten Terme auf, welche unser gewünschtes Resultat wieder zerstören. Was schließlich die anderen, spinabhängigen Terme der höheren Näherung in Gl. (16) anlangt, so stellen sie offenbar das Gegenstück zu entsprechenden Gliedern in der Arbeit von Bagge dar, welche in den dortigen, rein partikelmäßigen Untersuchungen ebenfalls auftreten. Bagge konnte zeigen, daß sie ein totales zeitliches Differential bilden und daher bei Mittelung über viele Bahnumläufe vernachlässigt werden können. In unserem Fall hätte ein Diskussion der spinabhängigen Glieder wenig Sinn, da durch unsere skalare Kopplung ohnedies schon Spinbindungen vernachlässigt sind. Zusammenfassend können wir sagen, daß in unserer Näherung der Massendefekt richtig herauskommt, doch mit ihm auch Glieder auftreten, die von der Art der Kopplung abhängig sind und deren Bedeutung daher fraglich ist.